Ασκ. $f: A \to B$

$X_i,\ i \in I$ οικογένεια $\in \mathcal{P}(A)$

$Y_i,\ i \in I$ -//- $\in \mathcal{P}(B)$

τοτε: $f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$

$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y)$ $\quad (x \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(x) \in Y)$

Λύση

$(\exists x \in \bigcup_{i\in I} X_i)$

y τυχόν, $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i_0 \in I)\ x \in X_{i_0}$ κ $y = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i_0 \in I)\ y \in f(X_{i_0}) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(X_i)$

ii) x τυχόν: $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I)\ x \in f^{-1}(Y_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i \in I)\ f(x) \in Y_i \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} Y_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right)$

Άσκηση

$\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} (A_i - B_j)\right)$

$I = \{1,2,3\}$ $\quad J = \{1,2\}$

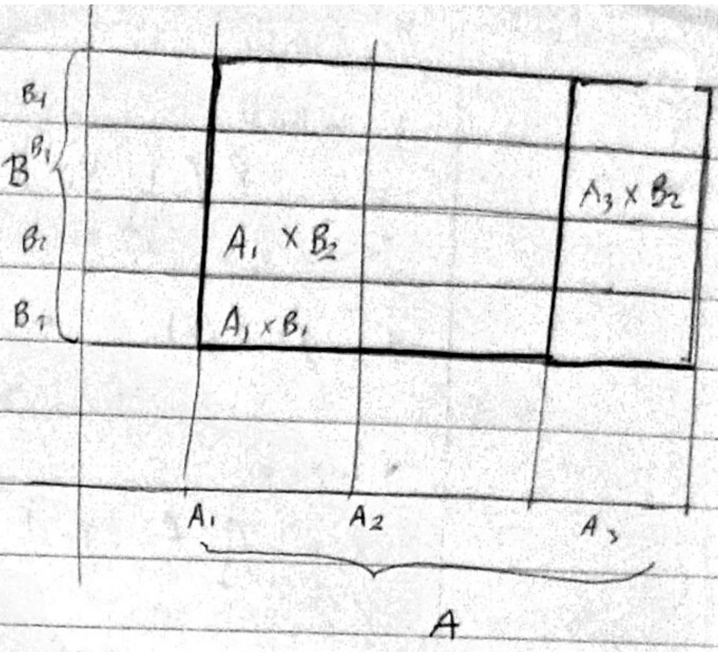
Άσκηση

$A_i,\ i\in I$ διαμέριση του A

$B_j,\ j\in J$ —//— B

Ν.δ.ο τα $A_i\times B_j,\ (i,j)\in I\times J$

είναι μία διαμέριση του $A\times B$



Αφού A_i διαμέριση του A $\rightarrow$ $(\forall i\in I)\ A_i\neq\emptyset$ ς' $(\forall j\in J)\ B_j\neq\emptyset$

B_i —//— του B

$A_i\times B_j\neq\emptyset$ για όλα τα $(i,j)\in I\times J$

Θ.δ.ο $\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i\times B_j = A\times B$

xιναι

$\forall (i,j)\in I\times J\quad A_i\times B_j\subseteq A\times B$ (γιατί $A_i\subseteq A$ ς' $B_i\subseteq B$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i\times B_j \subseteq A\times B}$

Θ.δ.ο $A\times B\subseteq \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i\times B_j$

Έστω (x,y) τυχόν $(x,y)\in A\times B \iff x\in A$ ς' $y\in B \Rightarrow$

$\xrightarrow[B=\bigcup_{i\in J} B_j]{A=\bigcup_{i\in I} A_i} \left[(\exists i_0\in I)\ x\in A_{i_0}\right]\wedge\left[(\exists j_0\in I)\ y\in B_{j_0}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cancel{(x,y)\in A_{i_0}\times}$ $(\exists (i_0,j_0)\in I\times J): (x\times y)\in A_{i_0}\times B_{j_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\ \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i\times B_j$

Για να είναι διαμέρισμα πρέπει ν.δ.ο ανά δύο είναι ξένα.

$(i,j) \neq (\kappa,\lambda) \iff \sim[(i,j)=(\kappa,\lambda)] \iff$

$\sim[i=\kappa \wedge j=\lambda] \iff i\neq\kappa \vee j\neq\lambda \quad (**)$

$(A_i \times B_j) \cap (A_\kappa \times B_\lambda) \overset{(*)}{=} (A_i \cap A_\kappa) \times (B_j \cap B_\lambda) \overset{(**)}{=} \emptyset$

σελ.50. διότι:

$(A\times B)\cap(\Gamma\times\Delta) \overset{(*)}{=} (A\cap\Gamma)\times(B\cap\Delta)$

ν.δ.ο. δεν ισχύει αν f,g σχέσεις

$f: A \to B$, $g: A \to B$ συναρτήσεις

Ν.δ.ο $\cancel{g \leq}\, f \subseteq g \to f = g$

(x,y) τυχόν ζεύγος $(x,y)\in g \Rightarrow \underbrace{x\in \Delta(g)=A}\ \wedge\ y=g(x)$ (*)

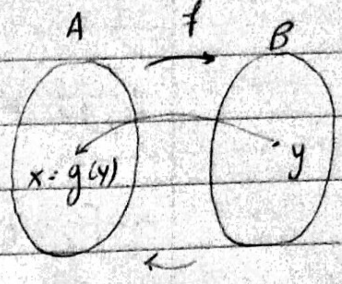
Όμως $x\in A = \Delta(f) \Rightarrow (\exists\, y'\in B)\ y=f(x) \Rightarrow (x,y')\in f \Rightarrow$

$\overset{f\subseteq g}{\Longrightarrow} (x,y')\in g \Rightarrow y'=g(x) \overset{(*)}{\Rightarrow} y=y'$

Άρα $(x,y)\in f$

Έστω $f: A \to B$, $g: B \to A$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$y = f(x) \iff x = g(y)$, $x \in A$, $y \in B$ *



Ν.δ.ο (i) f επί

(ii) f αμφιμονοσήμαντη

(iii) $f^{-1} = g$

i) Έστω y τυχόν στοιχείο:

$$y \in B \xRightarrow{g: B \to A} (\exists x \in A)\ g(y) = x \overset{*}{\iff} (\exists x \in A)\ y = f(x)$$

Η f επί!

ii) Θ.δ.ο f αμφιμονοσήμαντη.

Έστω $f(x) = f(z)$ για τυχόντα x, z εν A

Θέτω $f(x) = f(z) = y$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = y \overset{*}{\Rightarrow} g(y) = x \\ f(z) = y \overset{*}{\Rightarrow} g(y) = z \end{array}\right| \Rightarrow x = z$$

Άρα αμφιμονοσήμαντη

iii) Επειδή f αμφ. κ' επί του B υπάρχει η συνάρτηση

$f^{-1}: B \to A$ Θ.δ.ο $f^{-1} = g$ δηλ. ότι $f^{-1}(y) = g(y)$ για όλα τα $y \in B$

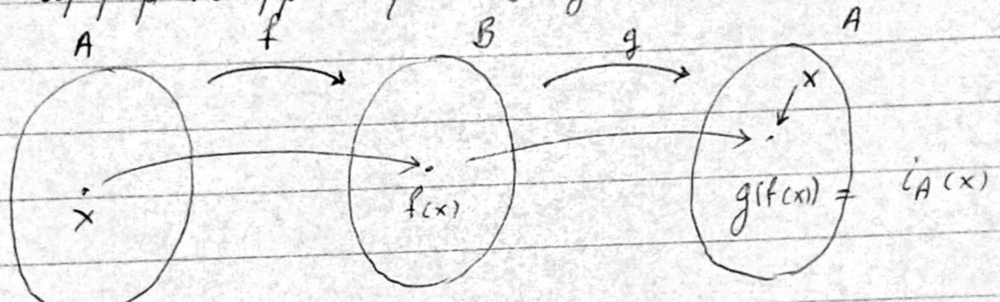
$y \in B$ κ' $f^{-1}(y) = x \in A \xRightarrow{f,\, f^{-1}} f(x) = y \Rightarrow g(y) = x$

οι τιμές ταυτίζονται Άρα $f^{-1}(y) = g(y)$ και επειδή έχουν και κοινά πεδία ορισμού ταυτίζονται και οι συναρτήσεις

Άσκηση

$f: A \to B$, $g: B \to A$, τέτοιες ώστε $g \circ f = i_A$

όπου i_A η ταυτοτική στο σύνολο A. Ν.δ.ο. η f αμφιμονοσήμαντη κ' g επί του A



Λύση

Ας είναι x_1, x_2 στοιχεία του A τέτοια, ώστε: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$\xRightarrow[f(x_2) \in B]{f(x_1) \in B} \begin{cases} g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) = i_A(x_1) = x_1 \\ g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = i_A(x_2) = x_2 \end{cases} \xRightarrow{f(x_1) = f(x_2)} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$ άρα η f αμφιμονοσήμαντη.

y τυχόν, $y \in A$

$$g(\underbrace{f(y)}_{z \in B}) = g \circ f(y) = i_A(y) = y \Rightarrow g \text{ επί}$$